



Convenzionalismo e costanti logiche

Paolo Maffezoli, Alberto Naibo

► To cite this version:

| Paolo Maffezoli, Alberto Naibo. Convenzionalismo e costanti logiche. 2014. hal-00940129

HAL Id: hal-00940129

<https://hal.science/hal-00940129>

Preprint submitted on 31 Jan 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Convenzionalismo e costanti logiche

Paolo Maffezioli[✧] Alberto Naibo[☆]

[✧]*Faculty of Philosophy, University of Groningen*

Oude Boteringestraat 52, 9712 GL Groningen, the Netherlands

[☆]*Institut d'Histoire et de Philosophie des Sciences et des Techniques (IHPST),*

Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne – ENS – CNRS (UMR 8590),

13, rue du Four, 75006 Paris, France

Sommario

L'adeguatezza della tradizionale definizione tarskiana di conseguenza logica e, *a fortiori*, di validità logica, richiede una soluzione positiva del seguente problema di demarcazione. Dato un certo linguaggio, è possibile separare i suoi elementi in due categorie distinte, quella delle espressioni logiche (“teoricamente neutrali”) e quella delle espressioni non logiche (“teoricamente cariche”)? In altri termini, è possibile formulare un criterio assoluto di logicità? Differenti approcci formali al problema hanno portato a differenti definizioni di ciò che è una costante logica. La scelta tra di esse potrebbe essere considerata, a prima vista, come una questione di puro convenzionalismo. Scopo di questo articolo è, da un lato, indagare la legittimità di tale idea e, dall'altro, individuare quelle situazioni in cui si è pienamente autorizzati a parlare di genuino convenzionalismo logico.

Indirizzi e-mail: p.maffezioli@rug.nl (P. Maffezioli), alberto.naibo@univ-paris1.fr (A. Naibo).

Nota redazionale. Questo lavoro è stato inizialmente concepito durante il semestre d'inverno dell'a.a. 2010–2011, quando i due autori erano entrambi *visiting PhD student* presso il Dipartimento di Filosofia dell'Università di Helsinki. Basato inizialmente su quanto esposto in Naibo (2010), il lavoro è stato successivamente finalizzato solamente nell'estate del 2013 e alcune note sono state aggiunte nel gennaio del 2014. Durante questi anni le idee e le posizioni degli autori hanno subito delle evoluzioni, anche piuttosto consistenti. Alcuni di questi cambiamenti possono essere apprezzati guardando l'articolo di Naibo & Petrolo (2014). Si noti infine che il presente lavoro è stato sottomesso alla rivista *Post* (<http://www.openpost.it/>) e dovrebbe apparire nel quarto numero, dedicato al tema delle convenzioni e curato da Giulia Pravato.

Abstract

The soundness of the traditional Tarskian definition of logical consequence and, *a fortiori*, of logical validity, calls for a positive solution to the following problem. Given a language, is it possible to split it up into two mutually exclusive categories, that of logical expressions (topic-neutral) and that of non-logical ones (theory-laden)? In other words, is it possible to state an absolute criterion of logicity? Different formal approaches led to different definitions of what counts as a logical constant. At first glance, the choice among them could be considered as an issue concerning pure conventionalism. The aim of this paper is, on the one hand, to inquire into the legitimacy of such an idea and, on the other hand, to detect those situations in which speaking about pure logical conventionalism is completely justified.

1 Introduzione

Nel 1936, A. Tarski propone quella che, ancora oggi, viene considerata come la *definizione standard* di *conseguenza logica*. Dato un insieme di enunciati K e un enunciato X , il fatto che X sia conseguenza logica di K viene stabilito dalla seguente condizione: « If, in the sentences of the class K and in the sentence X , the constants – apart from purely logical constants – are replaced by any other constants [...], and if we denote the class of sentences thus obtained from K by ' K' ', and the sentence obtained from X by ' X' ', then the sentence X' must be true provided only that all sentences of the class K' are true » (Tarski 1936, p. 415). È fondamentale notare che la correttezza e l'applicabilità di tale definizione dipendono dalla possibilità di discriminare ciò che è un'espressione logica da ciò che non lo è. In altri termini, in assenza di un *criterio di logicità* la definizione di Tarski violerebbe uno dei requisiti fondamentali per essere una buona definizione: nel *definiens* comparirebbe un concetto ambiguo, quello di 'costante logica', soggetto a interpretazione e arbitrarietà. Pertanto, in assenza di una base oggettiva che permetta di decidere se un'espressione è una costante logica oppure no, la proposta tarskiana potrebbe incorrere nel rischio di essere "inconsistente", identificando validità formale con validità materiale.

2 Convenzionalismo e criteri di logicità

Se non si vuole abbandonare la definizione tarskiana di conseguenza logica, bisogna allora cercare di individuare le condizioni necessarie e sufficienti che devono

essere soddisfatte da un'espressione del linguaggio al fine di essere catalogata come 'logica'. Solo in tale maniera si potrebbe disporre di un vero *criterio* di logicità. Come vedremo nel prosieguo del testo, diversi approcci formali sono stati proposti al fine di individuare un tale criterio. Verrebbe allora naturale pensare che la scelta fra di essi sia una pura questione di convenzionalità: non importa quale dei criteri proposti viene scelto poiché, una volta applicati, essi danno gli stessi "risultati". Per fare un parallelo, si potrebbe pensare di essere nella stessa situazione della geometria euclidea piana: non importa quale fra le assiomatizzazioni della geometria euclidea viene scelta poiché, anche se tali assiomatizzazioni sono fra loro (morfologicamente) diverse, alla fine si rivelano essere equivalenti, nel senso che tutti i loro modelli rispettano le stesse proprietà, in particolare quella di essere invarianti rispetto a isometrie. In tal caso, scegliere un'assiomatizzazione rispetto a un'altra è una questione di puro convenzionalismo nel senso che esse sono fra loro equivalenti e la scelta è dettata esclusivamente da considerazioni non essenziali, riguardanti cioè proprietà *estrinseche* alla geometria euclidea stessa, come ad esempio la minimalità del numero di assiomi, la minimalità della complessità logico-sintattica degli assiomi, la minimalità del numero di concetti primitivi usati, ecc.

Un altro esempio di convenzionalismo è dato dal caso riguardante i modi di assegnazione delle probabilità primitive (ovvero non condizionali). Queste maniere d'assegnazione dipendono dal tipo di *interpretazione* delle probabilità che si adotta. Ad esempio, si può assegnare la probabilità di un certo evento sulla base della scommessa che si è disposti a fare sul verificarsi di tale evento (interpretazione soggettivista), oppure sulla base di una valutazione frequentista dell'evento, cioè sulla base della frequenza con cui si è presentato in passato il fenomeno (interpretazione frequentista). Benché apparentemente differenti, se non anche contrastanti, tuttavia, sul lungo periodo, le due assegnazioni di probabilità convergono sullo stesso risultato. Questo è frutto di un risultato matematico: il cosiddetto *teorema di rappresentabilità* di B. de Finetti. Anche in tal caso, quindi, scegliere l'uno o l'altro dei due approcci alla fine non porta a cambiamenti sostanziali poiché, in termini di risultati matematici, le due interpretazioni sono concordanti.

Quello che si può estrarre da questi due esempi è un'idea più precisa di cosa intenderemo per convenzionalismo in questo articolo. In particolare, ci sembra che si possa parlare di convenzionalismo relativamente a certe definizioni solamente quando vi è un *invariante* comune a tutte queste definizioni. Questo significa che è possibile individuare una sorta di *matter of fact* che queste definizioni sono supposte cogliere e, inoltre, che tale invariante è identificabile in maniera puramente formale.

La questione centrale del nostro articolo è la seguente: possiamo parlare di convenzionalismo anche nel caso delle costanti logiche? Detto altrimenti, la scelta

di uno fra i vari criteri di logicità proposti è qualcosa di puramente convenzionale? Per decretarlo, dobbiamo capire se tutti essi individuano un invariante comune, cioè se esiste una sorta di *matter of fact* sul quale tutti essi convergono e che sia identificabile in maniera puramente formale e oggettiva.

Prima di iniziare la nostra indagine, ci pare utile fare una considerazione metodologica riguardante la maniera in cui viene stabilito un criterio di logicità. Formalmente parlando, questo criterio stabilisce quelle che sono le condizioni necessarie e sufficienti per essere una costante logica; pertanto esso ha la struttura di una definizione esplicita.¹ Ora, visto che il concetto di costante logica svolge il ruolo di *definiendum*, su quali basi sarà invece costruito il *definiens*? L'idea è che per costruirlo si debba partire da una sorta di intuizione o caratterizzazione informale di ciò che è logico; sarà quest'intuizione, dettata dall'esperienza, a fungere da guida alla formulazione del *definiens*. In altre parole, quello che fa un criterio di logicità è tentare di catturare in maniera formale e precisa un concetto informale costituitosi sulla base di considerazioni *a posteriori*, induttivamente ricavate a partire dall'insieme delle nostre pratiche linguistiche.

Due saranno le tipologie di criterio di logicità che andremo ad analizzare. La prima è prevalentemente semantica e incentrata sugli aspetti legati all'interpretazione dei simboli di un linguaggio in un modello (approccio *model*-teoretico); la seconda è sintattica e incentrata sulle proprietà inferenziali (approccio *proof*-teoretico).

3 L'approccio *model*-teoretico

Da un punto di vista morfologico non è difficile rispondere alla domanda che cos'è una costante logica, poiché i simboli per i connettivi proposizionali e quantificatori altro non sono se non operazioni di connessione tra espressioni del linguaggio.² Ad esempio, il connettivo \wedge è quella operazione che consiste nel prendere due espressioni e costruirne una terza ponendo tra le prime due il simbolo \wedge . La semplicità di tali operazioni non deve far trascurare la loro natura di funzioni in senso matematico, in quanto relazioni univocamente definite su un particolare dominio di oggetti, quello appunto delle espressioni. Tuttavia, connettivi e quantificatori

¹Per una caratterizzazione di cosa usualmente si intende per 'definizione esplicita' si veda Antonelli (1998).

²L'uso del termine 'espressione' può risultare piuttosto vago e impreciso, ma a questo livello ancora introduttivo vogliamo cercare di restare i più neutri possibile, senza doverci impegnare subito in una discussione riguardante il tipo di entità a cui si applicano i connettivi. Vedremo più avanti che l'identificazione di queste entità dipenderà dal tipo di approccio scelto per indagare la questione della logicità.

intervengono anche sul piano semantico e contribuiscono a determinare non solo la buona formazione delle espressioni ma anche il loro essere vere o false. In particolare, a ciascuna di tali operazioni è associata una clausola di soddisfacibilità che specifica quali sono le condizioni che devono essere soddisfatte affinché un'espressione composta mediante l'applicazione di tale operazione sia soddisfatta sotto un certo assegnamento delle variabili e da una certa interpretazione dei termini.

L'idea della natura funzionale delle entità linguistiche – ed in particolare dei predicati – deve essere fatta risalire a G. Frege³ che per primo ha individuato nel carattere “incompleto” di certe espressioni la via per una nuova analisi del linguaggio in termini di funzione-argomento. In questo modo, all'operazione di pura manipolazione simbolica di rimpiazzare con un nome la posizione vuota che un predicato esibisce mediante una variabile, corrisponde l'operazione semantica di applicazione di una funzione ad un argomento. Così, al predicato aritmetico ‘ x è pari’ corrisponde la funzione $f_{\text{pari}} : \mathbb{N} \longrightarrow \{V, F\}$ tale che

$$f_{\text{pari}}(x) = \begin{cases} V & \text{se } x \text{ è pari} \\ F & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Le entità che possono fungere da argomenti a cui la funzione f_{pari} si applica, appartengono al tipo degli oggetti, dove per ‘oggetto’ si intende tutto ciò che può costituire la denotazione di un nome proprio o di una descrizione definita. Tuttavia, Frege nota che ci sono espressioni che, pur esibendo lo stesso bisogno di completamento dei predicati come ‘ x è pari’, non possono essere completate da nomi. Infatti, ad espressioni di generalità come ‘ogni x ’ corrispondono funzioni che richiedono come argomenti entità che sono a loro volta funzioni. Così nell'espressione ‘ogni x è pari’ c'è ancora una funzione che viene saturata (‘ogni x ’) e qualcosa che la satura (‘ x è pari’), ma la seconda è a sua volta una funzione, di livello inferiore rispetto alla prima. Formalmente, ad ‘ogni x è pari’ corrisponde l'applicazione della funzione di secondo livello $f_{\text{ogni } x} : (\mathbb{N} \longrightarrow \{V, F\}) \longrightarrow \{V, F\}$ alla funzione di primo livello f_{pari} , così da ottenere

$$f_{\text{ogni } x}(f_{\text{pari}}(x)) = \begin{cases} V & \text{se } f_{\text{pari}}(x) = V \text{ per ogni } x \in \mathbb{N} \\ F & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questa prospettiva si può generalizzare ad un generico universo del discorso D : ad ogni predicato P viene associata una funzione $f_P : D \longrightarrow \{V, F\}$ tale che per ogni $x \in D$ si ha che

³Il testo di riferimento è l'*Ideografia*, vedi Frege (1879).

$$f_P(x) = \begin{cases} V & \text{se } x \text{ è un } P \\ F & \text{altrimenti} \end{cases}$$

mentre al quantificatore \forall corrisponde una $f_V : (D \longrightarrow \{V, F\}) \longrightarrow \{V, F\}$ tale che per qualsiasi $f_P : D \longrightarrow \{V, F\}$

$$f_V(f_P(x)) = \begin{cases} V & \text{se } f_P(x) = V \text{ per ogni } x \in D \\ F & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ora, visto che all'insieme di tutte le funzioni da D a $\{V, F\}$ corrisponde l'insieme $\wp(D)$, cioè l'insieme delle parti di D , possiamo riformulare la definizione precedente dicendo che al quantificatore \forall corrisponde la funzione $f_V : \wp(D) \longrightarrow \{V, F\}$ tale che⁴

$$f_V(x) = \begin{cases} V & \text{se } x = D \\ F & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzioni come f_P e f_V – che restituiscono come valore un valore di verità – sono dette da Frege ‘concetti’. Si può pensare di estendere questa concezione ai connettivi proposizionali. In fin dei conti essi possono essere pensati come corrispondenti a funzioni in cui dominio e codominio coincidono con $\{V, F\}$; ad esempio, la congiunzione \wedge si comporta come una funzione a due argomenti $f_\wedge : \{V, F\} \times \{V, F\} \longrightarrow \{V, F\}$ tale che per ogni $x, y \in \{V, F\}$

$$f_\wedge(x, y) = \begin{cases} V & \text{se } x = y = V \\ F & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La corrispondenza *espressioni incomplete/concetti insaturi* trasferisce il discorso dal piano linguistico a quello ontologico: la questione della logicità di certe espressioni linguistiche viene sottoposta in questo modo ad una riformulazione e può essere legittimamente posta nei termini di quali tipi di nozioni la logica si occupa. Detto altrimenti, una volta trasformato il problema delle costanti

⁴La lettura di Frege qui proposta è mediata attraverso una visione insiemista delle funzioni. Da una parte questo permette di creare un legame diretto con la concezione *model*-teoretica che vogliamo analizzare. Dall'altra, tuttavia, impedisce di essere completamente fedeli alla visione fregeana, secondo cui una funzione non può essere ridotta a un insieme perché gli insiemi sono oggetti, e funzioni e oggetti appartengono a categorie ontologiche totalmente distinte. Gli oggetti sono infatti, per usare una metafora chimica cara a Frege, entità sature, le funzioni invece, insature. Per maggiori informazioni sulla visione fregeana si veda Panza & Sereni (2010, §2.1.2).

logiche nel problema delle corrispondenti funzioni di verità, viene naturale chiedersi: che cosa hanno in comune le tali funzioni? Quali proprietà devono essere soddisfatte affinché una funzione possa dirsi un buon candidato per essere una funzione che corrisponde ad una costante logica? Più semplicemente, quali operazioni possiamo definire veramente logiche e quali invece andrebbero escluse? Occorre cioè stabilire un criterio per isolare (tra le tante) quelle funzioni che possono essere considerate genuinamente di competenza della logica, e distinguerle, per esempio, da quelle matematiche.

La proposta che Tarski avanzò in una conferenza tenuta a Londra nel 1966⁵ (Tarski 1986) consiste nel non mettere in dubbio la logicità di quelle nozioni che la logica (classica) stessa considera tali, e nel cercare sulla base di queste di isolare un principio che le giustifichi. Approssimativamente, possiamo dire che la nostra intuizione circa la natura della logica è duplice:⁶ da un lato, (M1) la logica è quella disciplina che astrae da ogni possibile contenuto, non avendo nessun oggetto di competenza specifico (*topic-neutrality*). In questo senso, (M1) è inteso come requisito di *formalità*. D'altra parte, e precisamente in virtù di tale astrazione, (M2) la logica è massimamente applicabile ed ha come potenziale area di competenza ogni campo del sapere. (M2) corrisponde pertanto all'intuizione che la logica è la disciplina più generale di tutte. L'idea di Tarski per verificare che certe nozioni sono completamente indipendenti dalla natura degli oggetti a cui si applicano e che non dipendono in nessun modo dal dominio di interpretazione delle espressioni del linguaggio, consiste sostanzialmente nel mostrare come qualunque trasformazione di tale dominio sia, da un punto di vista logico, irrilevante. Rispettare le condizioni (M1) e (M2) equivale, secondo Tarski, a far vedere che le nozioni della logica sono impermeabili a qualsiasi modificazione dell'universo del discorso e sono valide a prescindere dalle sue proprietà e dalla natura dei suoi oggetti. Al variare del contesto cesseranno di valere tutte le proprietà, eccezion fatta per quelle della logica che devono, al contrario, manifestare la capacità di essere invarianti rispetto alle possibili trasformazioni del dominio di interpretazione. Come definire rigorosamente il concetto di trasformazione del dominio? Secondo Tarski, tali trasformazioni coincidono, algebricamente, con il gruppo delle *permutazioni*, che è il più grande gruppo di trasformazioni definibili su un insieme. L'idea tarskiana applica al caso delle nozioni logiche i risultati di F. Klein e del cosiddetto programma di Erlangen, secondo cui una teoria matematica è distinguibile da un'altra in base al gruppo di trasformazioni rispetto a cui è invariante. Dato che la logica è la disciplina più generale di tutte, è legittimo supporre che essa sia invariante rispetto al gruppo più generale di trasformazioni, che è appunto il

⁵Tale conferenza fu poi ripetuta a Buffalo nel 1973.

⁶Seguiremo l'impostazione di Bonnay (2008) che sembra essere quella più filosoficamente esplicativa.

gruppo delle permutazioni. Da un punto di vista matematico, le permutazioni non sono altro che biiezioni del dominio su se stesso, e si dice che una funzione f è invariante sotto permutazione se e soltanto se per ogni suo argomento x e per ogni permutazione π di D si ha che $f(x) = f(\pi(x))$. Il criterio può essere formulato nel seguente modo:

Definizione 1 (Criterio di Tarski). *Una nozione ε è logica se e soltanto se corrisponde ad una funzione f_ε che è invariante sotto permutazione del dominio.*

Rispetto ad un gruppo di trasformazioni così ampio è semplice vedere come molte funzioni non risultino invarianti. Riprendiamo l'esempio del predicato ' x è pari', ma consideriamo la funzione corrispondente f_{pari} definita non sull'insieme dei numeri naturali, ma su quello degli interi \mathbb{Z} . Si ha che f_{pari} non è una costante logica secondo Tarski, dal momento che esiste almeno una permutazione e almeno un elemento di \mathbb{Z} rispetto a cui non è invariante. Se infatti consideriamo la permutazione $\pi(x) = x + 1$ possiamo dimostrare che $f_{\text{pari}}(x) \neq f_{\text{pari}}(\pi(x))$, per una opportuna scelta di x : per $x = 2$ abbiamo $f_{\text{pari}}(2) = V$ ma $f_{\text{pari}}(\pi(2)) = f_{\text{pari}}(3) = F$. Al contrario, f_V è invariante rispetto a tutte le permutazioni di un dato insieme D : infatti, per come è stata definita, f_V è una funzione che prende un sottoinsieme del dominio D come argomento A e restituisce come valore V se $A = D$, e come valore F in caso contrario. Ora, come potrebbe darsi il caso che permutando A si ottenga un insieme diverso da A ? Ogni permutazione, in quanto funzione biunivoca da un insieme in se stesso, può al massimo modificare l'ordine degli elementi di un insieme e quello che si ottiene permutando i suoi elementi in tutti i possibili modi è di nuovo l'insieme di partenza. Pertanto $f_V(A) = f_V(\pi(A))$, per ogni $A \subseteq D$, dato che se $A = D$ allora $A = \pi(A) = \pi(D)$.

Il criterio di invarianza sotto permutazione stabilisce una condizione necessaria di logicità, vale a dire: se una funzione non soddisfa il criterio allora la nozione corrispondente non è logica. Tuttavia potrebbe sorgere il dubbio se tale condizione sia anche sufficiente, ovvero se non permetta di annoverare tra le costanti logiche anche funzioni che la nostra intuizione ci dice non essere tali. Come abbiamo appena visto i quantificatori sono costanti logiche qualunque sia il dominio su cui variano, anche domini di cardinalità più che numerabile. In questi contesti nulla vieterebbe di pensare a quantificatori che fanno esplicito riferimento a tale cardinalità, con la conseguenza che molte nozioni di teoria degli insiemi verrebbero automaticamente considerate logiche a tutti gli effetti. Ad esempio, il quantificatore $\exists_{\aleph_1} x. \varphi(x)$ che formalizza una espressione del tipo 'esistono esattamente \aleph_1 elementi che sono φ ' è da considerarsi una costante logica perché invariante sotto permutazione. Tuttavia, \exists_{\aleph_1} comporta un'assunzione sulla natura del dominio (violando quindi la condizione (M1)), in particolare che esso sia più che numerabile. Infatti, per assegnare un valore di verità all'enunciato $\exists_{\aleph_1} x. \varphi(x)$

si fa ricorso alla funzione di verità associata al quantificatore \exists_{\aleph_1} , cioè alla funzione $f_{\exists_{\aleph_1}} : \wp(D) \longrightarrow \{V, F\}$. Ora, al fine di valutare una tale funzione si è costretti a verificare delle proprietà del dominio D , in particolare al fatto che sia più che numerabile, infatti la funzione è così definita:

$$f_{\exists_{\aleph_1}}(x) = \begin{cases} V & \text{se } x \neq \emptyset \wedge \text{card}(x) = \aleph_1 \\ F & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Detto altrimenti, il dominio D , nel corso della valutazione della funzione, non gioca più solo il ruolo di un parametro, ma diventa una vera e propria variabile, sulla quale vengono fatte delle assunzioni riguardanti certe proprietà. Verificare il soddisfacimento o meno di tali proprietà non sembra essere compito della pura logica, poiché essa, come già detto, non dovrebbe essere legata a particolari domini di discorso, ma dovrebbe essere piuttosto compito della matematica e, nel caso specifico, della teoria degli insiemi. S. Feferman esprime bene questa idea dicendo che « insofar as one or the other version of the thesis requires the existence of set-theoretical entities of a special kind, or at least of their determinate properties, it is evident that we have thereby transcended logic as the arena of universal notions independent of “what there is” » (Feferman 1999, p. 38.). Pertanto, applicando il criterio di Tarski si ha una *overgeneration* di nozioni logiche, dato che è possibile definire funzioni che sono logiche nel senso di Tarski ma che, se fatte corrispondere a quantificatori nel linguaggio, generano espressioni che la nostra intuizione ci dice essere piuttosto di competenza della teoria degli insiemi.

Per restringere il criterio tarskiano occorre prendere in considerazione non solo domini di interpretazione ma, più in generale, strutture, considerando quindi le permutazioni come applicabili non solo ad elementi di un insieme, ma anche alle relazioni e alle operazioni su di essi. Consideriamo, per esempio, le due strutture $\langle \mathbb{N}, +, < \rangle$ e $\langle 2\mathbb{N}, +', <' \rangle$. Il dominio della seconda struttura (i numeri naturali pari) è un sottoinsieme proprio del dominio della prima, tuttavia, essi possono essere messi in corrispondenza biunivoca tramite una funzione f , e quindi hanno la stessa cardinalità. Inoltre, se f preserva sia le relazioni che le funzioni, cioè se per ogni $a, b \in \mathbb{N}$, si ha che $a < b$ se e solo se $f(a) <' f(b)$, e che $f(a + b) = f(a) +' f(b)$, allora f è detta essere un isomorfismo. Gli isomorfismi sono quindi la controparte strutturale delle funzioni biunivoche tra insiemi. Ovviamente, come si possono variare le condizioni sulle funzioni, e da biunivoche ottenere funzioni iniettive o suriettive, così si possono avere strutture rispettivamente monomorfe ed epimorfe. Feferman propone appunto di abbandonare l'iniettività concedendo trasformazioni solo suriettive del dominio e di considerare l'invarianza sotto epimorfismo come nuovo criterio di logicità. Pertanto,

Definizione 2 (Criterio di Feferman). *Una nozione ε è logica se e soltanto se corrisponde ad una funzione f_ε che è invariante sotto la relazione di epimorfismo tra strutture.*

Questo esclude certamente quantificatori di cardinalità come \exists_{\aleph_1} , in quanto non invarianti sotto trasformazioni suriettive. Ma con essi sono esclusi anche i cosiddetti quantificatori numerici – intuitivamente logici – come \exists_3 , che permettono di generare formule del tipo ‘almeno 3 x sono φ ’. Tuttavia, come viene fatto notare in Bonnay (2008), le ragioni per respingere \exists_3 e \exists_{\aleph_1} dovrebbero essere molto diverse tra loro, dato che il primo è definibile nella logica dei predicati standard, mentre il secondo no; ciononostante entrambi vengono esclusi dal novero delle nozioni logiche dal criterio di Feferman. In questo modo la logica neutralizza ogni possibile contenuto cardinale, sia finito che infinito, sebbene non ci siano vere ragioni perché essa debba essere completamente « blind to numbers » (Bonnay 2008, p. 42).

Secondo Bonnay, non è vero che ogni questione legata alla cardinalità vada considerata non logica; dopo tutto il concetto di ‘essere non vuoto’ che caratterizza la quantificazione esistenziale è sinonimo di avere almeno cardinalità pari a 1. Bisogna allora capire bene quale sia il contenuto di cardinalità che vorremmo escludere e quale invece vorremmo mantenere. C’è infatti un contenuto insiemistico che è davvero problematico, e in quanto tale il criterio dovrebbe riconoscerlo come non logico; ma dovrebbe anche distinguere quelle nozioni di teoria degli insiemi che pur essendo legate alla cardinalità sono nondimeno parte integrante della logica. In particolare, secondo Bonnay, solo i quantificatori di cardinalità infinita più che numerabile sono di competenza della teoria degli insiemi, mentre gli altri possono essere a buon diritto considerati logici. Ad esempio, un quantificatore che permetta di generare enunciati come l’ipotesi del continuo non è un quantificatore logico; ciò non significa che ogni nozione che fa riferimento in un qualche modo a quanti elementi compongono un insieme sia fuori dalla portata della logica.

Vediamo come viene resa formalmente quest’intuizione. Innanzitutto, si assume il principio della chiusura sotto definibilità (Bonnay 2008, p. 50), secondo il quale se un simbolo è definibile solo mediante le costanti della logica dei predicati standard allora è una costante logica. Si vede chiaramente che il quantificatore numerico $\exists_3 x. \varphi(x)$ è definibile nella logica dei predicati standard tramite la formula $\exists x \exists y \exists z (\varphi(x) \wedge \varphi(y) \wedge \varphi(z) \wedge x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z)$, e può quindi a buon diritto essere incluso nel novero delle costanti logiche.⁷ Questo non è possibile nel

⁷Si noti che il predicato di identità (=) che compare nella formula sotto analisi viene annoverato come costante logica dal criterio di Tarski, mentre è escluso dal criterio di Feferman.

caso di \exists_{\aleph_1} , a meno di non ammettere un linguaggio infinitario. Ed anche qualora espressioni di lunghezza infinita fossero ammesse, il quantificatore resterebbe ugualmente problematico, in quanto facente riferimento ad un insieme specifico di oggetti, vanificando la pretesa della logica di essere *topic neutral*. Il criterio di logicità deve essere formulato in modo tale che non solo riconosca come logici i quantificatori e i connettivi proposizionali, ma anche qualunque altra operazione che sia definibile in termini di questi. La chiusura sotto definibilità costituisce il limite inferiore della logica in quanto garantisce la logicità di tutto ciò che è logicamente definibile.

Per neutralizzare il contenuto insiemistico problematico di \exists_{\aleph_1} occorre avere una teoria degli insiemi di riferimento, che Bonnay assume essere quella di Zermelo-Fraenkel con l'assioma di scelta (ZFC). Intuitivamente, due strutture devono essere considerate logicamente simili se l'unica differenza riguarda strettamente ZFC. L'idea quindi è quella di tenere distinte, attraverso la nozione di *formula assoluta*, le espressioni di ZFC che sono di contenuto problematico: così ' x è un ordinale', ' x è un ordinale limite' sono formule assolute di ZFC, mentre ' x è un cardinale', ' x è di cardinalità \aleph_1 ' non lo sono.⁸ Si impone poi una forma di chiusura sotto assolutezza, ovvero si considerano logiche tutte quelle nozioni insiemistiche che sono assolute rispetto a ZFC.

Giunti a questo punto, come integrare definibilità e assolutezza nel criterio di logicità? Bonnay nota come le relazioni di similarità permettono di confrontare strutture e di stabilire rapporti di inclusione: ad esempio, se \mathcal{A} e \mathcal{B} sono isomorfe (scritto: $\mathcal{A} \text{ Iso } \mathcal{B}$) allora sono anche epimorfe ($\mathcal{A} \text{ Epi } \mathcal{B}$) e quindi $\text{Iso} \subseteq \text{Epi}$; da qui si può definire una relazione di ordine \leq tra relazioni di similarità S e S' , ponendo $S \leq S'$ se e soltanto se $S' \subseteq S$. Dalla teoria dei modelli, sappiamo che due strutture isomorfe rendono vere tutte e sole le stesse formule, questo implica che sono anche elementarmente equivalenti, ovvero realizzano gli stessi enunciati. Non vale invece il contrario: due strutture elementarmente equivalenti possono non essere tra loro isomorfe, come nel caso di $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ e $\langle \mathbb{R}, < \rangle$: i razionali formano rispetto all'ordinamento un insieme incompleto, nel senso che è un insieme con "buchi", laddove i reali hanno elementi – ad esempio in corrispondenza di $\sqrt{2}$; tuttavia non esiste una formula della logica dei predicati standard che le distingue, ovvero che esprime la differenza dell'una rispetto all'altra, perché questo

⁸In effetti, stabilire qual è la cardinalità di un dato insieme dipende da quali modelli della teoria degli insiemi vengono scelti, dipende cioè da come è definita la gerarchia degli insiemi. Per esempio essa può essere definita basandosi sull'uso dell'operazione per la creazione dell'insieme delle parti di un dato insieme (così da ottenere la cosiddetta gerarchia di von Neuman), oppure può essere definita usando delle operazioni costruttive per la creazione di nuovi insiemi (così da ottenere la cosiddetta gerarchia degli insiemi costruibili di Gödel). Per maggiori dettagli si veda Jensen (1995).

andrebbe al di là del potere espressivo del linguaggio.⁹ Tuttavia, pur non essendo isomorfe, $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ e $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ sono potenzialmente isomorfe (scritto: $\mathcal{A} Iso_p \mathcal{B}$), nel senso che sono isomorfe le due strutture che si ottengono considerando due sottoinsiemi A e B di \mathbb{R} e \mathbb{Q} , rispettivamente. Il vantaggio che si ottiene nel passaggio da Iso a Iso_p si lascia riassumere bene dicendo che « [t]wo structures which are isomorphic are exactly identical to one another as structures, the only difference consisting in the nature of the elements of their domains. On the contrary, [...] two structures which are potentially isomorphic are not fully identical: they are just similar in the sense that they are always, so to speak, locally isomorphic. » (Bonney 2008, pp. 48–49). A questo punto possiamo formulare un nuovo criterio di logicità:

Definizione 3 (Criterio di Bonney). *Una nozione ε è se e soltanto se corrisponde ad una funzione f_ε che è invariante sotto la relazione di isomorfismo potenziale tra strutture.*

Questo criterio comporta una notevole estensione del territorio della logica; e non c'è da stupirsi, dato che sono considerate logiche tutte quelle nozioni di teoria degli insiemi non eccessivamente ricche. Questo equivale a sostenere che la logica pur avendo a che fare con nozioni molto generali, non per questo è, come voleva Wittgenstein, priva di potere informativo rispetto allo stato del mondo; in effetti, sostiene Bonney, c'è una parte – per quanto circoscritta – di strutture matematiche su cui la logica ha diritto di esprimersi, sebbene ad un certo punto essa sia costretta a cedere il passo alla teoria degli insiemi: « Logical notions are the most general notions which deal with certain kind of features; but in order to make sense of the generality of logic, one has to say what matters to logic » (Bonney 2008, p. 49).

Il passo citato ha una rilevanza notevole per la questione del convenzionalismo. Se un genuino convenzionalismo si dà laddove sussiste un *matter of fact*, è chiaro che la questione del convenzionalismo delle nozioni logiche non può essere posta fintantoché tale *matter of fact* non sia stato definito univocamente. Mentre i confini della logica dovrebbero costituire un punto da cui partire per la formulazione di un criterio di logicità e una base fissa rispetto alla quale valutare proposte alternative, sembra quasi che non appena ci si addentri nella questione dello statuto ontologico delle nozioni logiche non si riesca a capire quello che si

⁹La completezza dell'ordine di \mathbb{R} può essere definita nella seguente maniera: per ogni sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$, se A ha un maggiorante, allora esiste un estremo superiore di A in \mathbb{R} . Ora, questa proprietà non è esprimibile al prim'ordine perché si sta quantificando sulla *totalità* dei sottoinsiemi del dominio (*i.e.* \mathbb{R}). Questo tipo di quantificazione è possibile, invece, spostandosi al second'ordine (*full second-order logic*).

dovrebbe considerare logico e cosa invece matematico. L'eterogeneità degli approcci presenta quindi un fenomeno a dir poco singolare: la ricerca di un criterio di logicità, invece di inscrivere entro i confini che separano logica e matematica, influenza fortemente l'idea stessa di tale confine, portandoci ora ad allargarlo fino alla coincidenza con la teoria degli insiemi, ora a restringerlo ben poco al di là della logica del primo ordine. Secondo Tarski, i confini della logica sono piuttosto ampi ed il suo criterio porta a stabilire la logicità di ogni nozione insiemistica. Questo ha portato Feferman ed altri a considerare l'invarianza sotto permutazione un criterio necessario ma non sufficiente. La domanda è: sufficiente rispetto a cosa? Rispetto alla nostra intuizione di cosa è logico, rispetto quindi a quelle condizioni (M1) e (M2) che tradizionalmente la logica si assume la prerogativa di soddisfare. Ma è pur vero che tale intuizione è fortemente influenzata dalla cosiddetta teoria della quantificazione classica, ovvero da una base di nozioni logiche la cui logicità non può essere messa in discussione dato che essa stessa è il filo conduttore per la formulazione del criterio. Non si sta cercando di sostenere che l'approccio *model*-teoretico è affetto da una qualche forma di circolarità, ma che esso ha una specificità che lo contraddistingue da quello *proof*-teoretico che verrà analizzato nel seguito: nell'approccio *model*-teoretico la nozione classica di logicità, ovvero i connettivi e quantificatori classici, sono considerati come logici quasi per definizione, e questo vale per tutti e tre i criteri presi in considerazione. Rispetto a questo insieme di connettivi classici, si può quindi parlare di convenzionalismo, visto che tutti e tre i criteri analizzati convergono su questo insieme. La questione del convenzionalismo viene rimessa in gioco solamente quando si inizia a uscire dall'insieme dei connettivi classici, per esempio introducendo dei quantificatori generalizzati (come abbiamo visto in precedenza) o delle modalità (*cfr.* van Benthem & Bonnay 2008), solo allora infatti i tre criteri iniziano a divergere. L'approccio *proof*-teoretico, invece, come vedremo, va alla ricerca di un criterio di logicità per ogni tipo di operazione logica, anche per quelle che la tradizione ha consacrato come classiche. Non sorprenderà quindi che sarà proprio la logicità della nozione classica di costante logica ad opporre una sorta di resistenza ai nuovi criteri.

4 L'approccio *proof*-teoretico

L'idea intuitiva che guida l'approccio *proof*-teoretico è basata su due considerazioni: (P1) la logica è la disciplina che si interessa dello studio di quel tipo di derivazioni o argomenti deduttivi – intese come successioni finite di enunciati o asserzioni – tali per cui la conclusione si impone in maniera necessaria per il solo fatto che le premesse sono strutturate in un determinato modo (*cfr.* Aristotele,

Analitici primi, I.1, 24b18-20); (P2) tali derivazioni non devono far aumentare il nostro insieme di conoscenze in maniera significativa, nel senso che le derivazioni logiche non devono permettere di derivare informazioni che non siano già implicitamente presenti nelle premesse. In tal senso la logica si interessa della *forma* delle derivazioni, cioè della loro struttura e del loro metodo di costruzione, indipendentemente dalle particolari istanziazioni (materiali) degli enunciati che appaiono nelle derivazioni.

Questa visione porta con sé diverse assunzioni implicite. Innanzi tutto, essa induce a considerare le costanti logiche come degli operatori essenzialmente linguistici, ossia dei connettivi. Specificheremo meglio nel prosieguo del testo a livello di quali entità linguistiche essi agiscono (proposizioni, enunciati, asserzioni, ecc.). In secondo luogo, il requisito di non creatività delle derivazioni logiche è qualcosa che si deve riflettere a livello di queste stesse entità linguistiche. Infine, è fondamentale notare che il comportamento dei connettivi linguistici è determinato da delle regole di inferenza di un certo sistema deduttivo, come quelle della deduzione naturale o del calcolo dei sequenti. Questo approccio, pertanto, è primariamente sintattico: differentemente dall'approccio *model*-teoretico, il riferimento alle nozioni di interpretazione e di verità è abbandonato in favore delle nozioni di inferenza e derivazione. Per interrogarsi sulla questione della logicità non è necessario cercare un altro piano di discorso isomorfo al linguaggio, tutto può essere già fatto a livello linguistico.

Due sono i criteri di logicità di tipo *proof*-teoretico maggiormente noti. Come vedremo, fra di essi sussistono differenze particolarmente rilevanti.

4.1 Il criterio di Belnap: conservatività e unicità

Il primo è stato proposto da N. Belnap nel 1962¹⁰ e corrisponde all'idea che un certo connettivo linguistico C può dirsi una costante logica se rispetta le seguenti condizioni: (B1) l'aggiunta di C al linguaggio di base \mathcal{L} di una certa teoria T non perturba – non modifica quello che è – l'insieme dei teoremi di T ; (B2) C è *univocamente* determinato dalle sue proprie regole di inferenza. La prima di queste due condizioni tenta di cogliere l'idea che la logica è neutrale rispetto ad una certa teoria, nel senso che non apporta nessuna nuova informazione su T . La seconda vuole esprimere il fatto che sono sufficienti le regole d'inferenza e la loro particolare struttura per definire in maniera non ambigua un connettivo logico. Per esprimere in maniera più precisa e formale queste due condizioni è necessario dare qualche definizione. Importante è notare che, in tal caso, le entità linguistiche

¹⁰Tale criterio ha avuto una certa fortuna anche grazie a lavori relativamente più recenti come Došen & Schroeder-Heister (1988).

sulle quali le costanti logiche sono applicate sono degli enunciati (*sentences*), cioè delle formule ben formate del linguaggio.

Definizione 4 (Teoria). *Una teoria è una tripla $T = \langle \mathcal{L}, En_{\mathcal{L}}, \vdash_T \rangle$, dove:*

- i) \mathcal{L} è un linguaggio.
- ii) $En_{\mathcal{L}}$ è l'insieme degli enunciati di \mathcal{L} .
- iii) \vdash_T è un sottoinsieme di $\wp(En_{\mathcal{L}}) \times En_{\mathcal{L}}$ chiuso per:
 - 1) *riflessività*: $\forall \Gamma \in \wp(En_{\mathcal{L}}), \forall \varphi \in En_{\mathcal{L}} (\Gamma, \varphi \vdash_T \varphi)$
 - 2) *transitività*: $\forall \Gamma, \Gamma' \in \wp(En_{\mathcal{L}}), \forall \varphi, \chi, \psi \in En_{\mathcal{L}} (se \Gamma, \varphi \vdash_T \chi e \Gamma', \chi \vdash_T \psi, allora \Gamma, \Gamma', \varphi \vdash_T \psi)$
 - 3) *monotonia*: $\forall \Gamma, \Gamma' \in \wp(En_{\mathcal{L}}), \forall \varphi \in En_{\mathcal{L}} (se \Gamma \vdash_T \varphi e \Gamma \subseteq \Gamma', allora \Gamma' \vdash_T \varphi)$

(La notazione $\Gamma, \varphi \vdash_T \psi$ è un'abbreviazione per $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash_T \psi$)

L'insieme \vdash_T corrisponde a ciò che viene chiamata una relazione di derivabilità: la sua estensione è determinata da un particolare insieme di assiomi oppure da delle regole di inferenza. Questo significa che, se due teorie hanno lo stesso linguaggio ma assiomi o regole di inferenza differenti, questa differenza si rifletterà sull'estensione delle due relazioni di derivabilità corrispondenti.

Ora, grazie alla Definizione 4 possiamo dare una caratterizzazione formale del punto (B1).

Definizione 5 (Estensione conservativa). *Siano $T = \langle \mathcal{L}, En_{\mathcal{L}}, \vdash_T \rangle$ e $T' = \langle \mathcal{L}', En_{\mathcal{L}'}, \vdash_{T'} \rangle$ due teorie. T' un'estensione conservativa di T se e solo se valgono le seguenti proprietà:*

- 1) $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$
- 2) $En_{\mathcal{L}} \subseteq En_{\mathcal{L}'}$
- 3) $\vdash_T = \vdash_{T'} \upharpoonright \mathcal{L}$ (i.e. $\forall \Gamma \in \wp(En_{\mathcal{L}}), \forall \varphi \in En_{\mathcal{L}}, \Gamma \vdash_T \varphi$ se e solo se $\Gamma \vdash_{T'} \varphi$)

Un connettivo che rispetta questo requisito di conservatività è un connettivo che non apporta modificazioni alla teoria di partenza, nel senso che non modifica la relazione di derivabilità corrispondente a tale teoria e al linguaggio iniziale. Più prosaicamente, il connettivo in questione non aggiunge alcuna nuova conoscenza riguardante la teoria di base: le conoscenze esprimibili con il linguaggio di partenza restano immutate rispetto all'aggiunta del nuovo connettivo.

Per dare un esempio concreto di come funziona la condizione di conservatività, consideriamo il connettivo **tonk** definito dalle seguenti regole in deduzione naturale (Prior 1960):

$$\frac{\Gamma \quad \vdots \quad \varphi}{\varphi \text{ tonk } \psi} \text{ tonk-intro} \qquad \frac{\Gamma \quad \vdots \quad \varphi \text{ tonk } \psi}{\psi} \text{ tonk-elim}$$

Consideriamo ora il linguaggio $\mathcal{L} = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \perp\}$ e, come teoria, la logica proposizionale intuizionista $LI = \langle \mathcal{L}, En_{\mathcal{L}}, \vdash_{LI} \rangle$, dove \vdash_{LI} è determinato dal sistema NJ delle regole di deduzione naturale per la logica intuizionista.¹¹ Siano $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \cup \{\text{tonk}\}$ e $LI^* = \langle \mathcal{L}^*, En_{\mathcal{L}^*}, \vdash_{LI^*} \rangle$, dove \vdash_{LI^*} è ottenuto aggiungendo a NJ le due regole per **tonk**. Tale aggiunta permette di costruire la seguente derivazione:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} 1. \\ \text{tonk-intro} \frac{[\varphi]}{\varphi \text{ tonk } \psi} \\ \text{tonk-elim} \frac{\varphi \text{ tonk } \psi}{\psi} \\ \rightarrow\text{-intro } 1. \frac{\psi}{\varphi \rightarrow \psi} \end{array} \quad \begin{array}{c} 2. \\ \text{tonk-intro} \frac{[\varphi \rightarrow \psi]}{(\varphi \rightarrow \psi) \text{ tonk } \perp} \\ \text{tonk-elim} \frac{(\varphi \rightarrow \psi) \text{ tonk } \perp}{\perp} \\ \rightarrow\text{-intro } 2. \frac{\perp}{(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \perp} \\ \rightarrow\text{-elim} \frac{(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \perp}{\perp} \end{array} \end{array}$$

Questo significa che $\vdash_{LI^*} \perp$. Ora, è noto che la logica proposizionale intuizionista è consistente,¹² pertanto $\nvdash_{LI} \perp$. Ma $\perp \in En_{\mathcal{L}}$ e quindi non è rispettato il punto 3) della Definizione 5.¹³ La conclusione è che **tonk** non potrà far parte dell'insieme delle costanti logiche.

Tuttavia, vi possono essere anche connettivi la cui aggiunta resta conservativa rispetto alla teoria di base, ma che non riescono ad essere definiti *univocamente* dalle regole di inferenza associate. L'idea di Belnap è che, se due connettivi sono definiti dalle stesse regole di inferenza allora, per essere considerati come logici, essi devono poter essere identificati a livello di derivabilità. Questo significa che, dati due connettivi n -ari \bullet e \oslash definiti esattamente dalle stesse regole inferenziali, affinché siano logici dovrebbe essere possibile poter dimostrare che

¹¹ Per un'esposizione delle regole di NJ si veda Troelstra & Schwichtenberg (2000, pp. 36–37).

¹² Per una dimostrazione *proof*-teoretica basata sull'impossibilità di avere prove di \perp a partire da assunzioni vuote si veda Prawitz (1965).

¹³ Questo perché \perp può essere considerato come un connettivo 0-ario e, per definizione, un connettivo 0-ario è equivalente a un enunciato proposizionale. Da notare l'analogia con le funzioni 0-arie; per definizione, una funzione 0-aria è uguale a una costante individuale.

$\bullet(\varphi_1 \dots \varphi_n) \vdash \oslash(\varphi_1 \dots \varphi_n)$ e $\oslash(\varphi_1 \dots \varphi_n) \vdash \bullet(\varphi_1 \dots \varphi_n)$, per ogni $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ e usando esclusivamente le regole proprie a tali connettivi. Una conseguenza immediata è che, se la condizione è soddisfatta, in realtà, stiamo definendo un solo connettivo e non due: l'insieme delle regole che governano un connettivo (logico) devono essere associate a tale connettivo in maniera funzionale, non possono cioè governare anche altri connettivi. Possiamo dunque chiamare questa proprietà la *proprietà dell'unicità*. Essa corrisponde a una sorta di principio di identità degli indiscernibili relativamente alle proprietà inferenziali dei connettivi: se due connettivi non possono essere distinti in base alle loro caratteristiche inferenziali, poiché governati dalle stesse regole di inferenza, allora questi connettivi sono identici relativamente alla relazione di derivabilità. Questa è una situazione che viene rispettata dagli usuali connettivi logici come \rightarrow , \wedge , \vee , \forall , \exists . Per esempio, supponiamo di definire il connettivo \rightarrow^* con le stesse regole di \rightarrow :

$$\begin{array}{c} \text{1.} \\ \Gamma, [\varphi]^n \\ \vdots \\ \psi \\ \hline \varphi \rightarrow^* \psi \quad \rightarrow^*\text{-intro 1.} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \Gamma \qquad \Gamma' \\ \vdots \qquad \vdots \\ \varphi \rightarrow^* \psi \quad \varphi \\ \hline \psi \quad \rightarrow^*\text{-elim} \end{array}$$

(dove $n \geq 0$ rappresenta il numero di volte che φ compare come assunzione)

Se si riesce a dimostrare che $\varphi \rightarrow \psi \vdash \varphi \rightarrow^* \psi$ e $\varphi \rightarrow^* \psi \vdash \varphi \rightarrow \psi$, per ogni $\varphi, \psi \in \text{En}_{\mathcal{L}}$, allora possiamo dire che \rightarrow è definito univocamente e quindi essere certi della sua logicità. Questo è esattamente quello che succede:

$$\begin{array}{c} \text{1.} \\ \varphi \rightarrow \psi \quad [\varphi] \\ \hline \psi \quad \rightarrow\text{-elim} \\ \hline \varphi \rightarrow^* \psi \quad \rightarrow^*\text{-intro 1.} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{1.} \\ \varphi \rightarrow^* \psi \quad [\varphi] \\ \hline \psi \quad \rightarrow^*\text{-elim} \\ \hline \varphi \rightarrow \psi \quad \rightarrow\text{-intro 1.} \end{array}$$

Consideriamo ora il connettivo unario \Box , definito dalle seguenti regole:

$$\begin{array}{c} \Box \Gamma \\ \vdots \\ \varphi \\ \hline \Box \varphi \quad \Box\text{-intro} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ \Box \varphi \\ \hline \varphi \quad \Box\text{-elim} \end{array}$$

Tale connettivo corrisponde all'operatore modale di necessità del sistema **S4**. Come nel caso precedente definiamo un altro connettivo unario \Box^* con le stesse regole di \Box :

$$\frac{\begin{array}{c} \Box^* \Gamma \\ \vdots \\ \varphi \end{array}}{\Box^* \varphi} \Box^* \text{-intro}$$

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ \Box^* \varphi \end{array}}{\varphi} \Box^* \text{-elim}$$

È facile vedere che con queste regole non è più possibile provare la proprietà dell'unicità per questi due connettivi. Infatti, le seguenti derivazioni non possono essere chiuse:

$$\frac{\frac{\Box \varphi}{\varphi} \Box \text{-elim}}{?}$$

$$\frac{\frac{\Box^* \varphi}{\varphi} \Box^* \text{-elim}}{?}$$

La conclusione è che le condizioni di logicità imposte da Belnap sono assai restrittive. Non solo eliminano dal novero delle costanti logiche dei connettivi intrinsecamente patologici come **tonk**,¹⁴ ma eliminano anche dei connettivi che saremmo piuttosto ben disposti a considerare come genuinamente logici, per esempio certe modalità aletiche. La condizione di unicità potrebbe dunque essere una condizione non necessaria di logicità.

4.2 Il criterio di armonia

Il secondo criterio di logicità in stile *proof*-teoretico che andremo ad analizzare è stato proposto, in forme non troppo differenti, da M. Dummett, D. Prawitz e P. Martin-Löf (Dummett 1991, Prawitz 1971, Martin-Löf 1996).¹⁵ Per loro, il rispetto delle condizioni (P1) e (P2) si traduce nell'idea che vi debba essere un'*armonia* fra regole di introduzione e regole di eliminazione per un certo connettivo. In particolare, mentre il punto (P1) viene considerato essere banalmente soddisfatto dallo scegliere di centrare l'attenzione esclusivamente sulle regole di inferenza, è la maniera in cui il punto (P2) viene catturato che merita maggior attenzione. Più precisamente, la non creatività caratterizzante un connettivo logico viene assicurata dal rispetto della condizione seguente:

Definizione 6 (Principio di Prawitz). *Le regole di eliminazione associate ad un certo connettivo C non devono permettere di derivare più di quanto segue dalle premesse delle regole di introduzione per C.*

¹⁴Un connettivo come **tonk** è intrinsecamente patologico nel senso che, se anche preso da solo, esso conduce a conseguenze poco desiderabili, come per esempio la banalizzazione della nozione di derivabilità: $\forall \varphi \forall \psi (\varphi \vdash \psi)$.

¹⁵Per una panoramica generale sulle differenze fra questi autori si veda Moriconi (1993).

Se tale condizione è rispettata, le regole d'inferenza relative a un dato connettivo sono fra loro armoniche e tale connettivo può essere considerato come logico. Sul piano più propriamente formale questo principio di armonia corrisponde a quella che, in deduzione naturale, viene chiamata *normalizzazione*. Quest'ultima altro non è che la procedura di eliminazione di *detours* dalle prove,¹⁶ dove un *detour* è una “configurazione inferenziale” formata da una regola di introduzione per un certo connettivo C , immediatamente seguita da una regola di eliminazione per C (tale per cui l'enunciato che è conclusione della regola di C -introduzione corrisponde alla premessa maggiore della regola di C -eliminazione). Per esempio, consideriamo ancora una volta l'implicazione. Un \rightarrow -detour sarà eliminato nella maniera seguente:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c}
 \Gamma \\
 \vdots \mathcal{D}_1 \\
 \varphi \\
 \hline
 \psi
 \end{array}
 &
 \begin{array}{c}
 1. \\
 \Gamma', [\varphi]'' \\
 \vdots \mathcal{D}_2 \\
 \psi \\
 \hline
 \varphi \rightarrow \psi \quad \rightarrow\text{-intro } 1. \\
 \hline
 \psi \quad \rightarrow\text{-elim}
 \end{array}
 &
 \rightsquigarrow
 \begin{array}{c}
 \Gamma \\
 \vdots \mathcal{D}_1^{<n>} \\
 \Gamma', \varphi \\
 \vdots \mathcal{D}_2[\mathcal{D}_1/\varphi] \\
 \hline
 \psi
 \end{array}
 \end{array}$$

Un risultato fondamentale è che l'intero sistema NJ soddisfa il *teorema di normalizzazione*: ogni derivazione contenente dei *detours* può essere trasformata in una derivazione senza *detours* (cfr. Troestra & Schwichtenberg 2000, p. 182). Una conseguenza diretta del teorema di normalizzazione è che le derivazioni normali di NJ sono *analitiche*: se \mathcal{D} è una derivazione normale di φ dall'insieme di premesse Γ , allora le formule che appaiono all'interno di \mathcal{D} sono tutte sottoformule di Γ o di φ . Questo significa che, date le premesse, la conclusione contiene *potenzialmente* tutta l'informazione sufficiente per ricostruire l'albero di derivazione corrispondente a \mathcal{D} . In questo senso la conclusione segue analiticamente dalle premesse, visto che non vi è altra informazione a cui si deve far ricorso per esibire la derivazione corretta. La condizione (P2) è pertanto rispettata. Inoltre, visto che NJ contiene solamente i connettivi della logica intuizionista, si può concludere che tali connettivi sono dei connettivi logici a tutti gli effetti.

Il problema del criterio di armonia, però, è la sua eccessiva permissività. In particolare, esso si rivela insufficiente a eliminare certi connettivi che difficilmente saremmo disposti ad annoverare come genuinamente logici. In altre parole, il principio di Prawitz impone solo una condizione necessaria, ma non sufficiente, di

¹⁶Nel calcolo dei sequenti il suo corrispettivo è la procedura di eliminazione della regola del taglio (*cut elimination*).

logicità. Consideriamo per esempio, il connettivo binario \star definito dalle seguenti regole (*cfr.* Naibo & Petrolo 2014):

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma \quad \Gamma' \\ \vdots \quad \vdots \\ \varphi \quad \psi \end{array}}{\varphi \star \psi} \star\text{-intro} \qquad \frac{\begin{array}{c} \Gamma \quad \Gamma' \\ \vdots \quad \vdots \\ \varphi \star \psi \quad \varphi \end{array}}{\psi} \star\text{-elim}$$

Tale connettivo soddisfa la normalizzazione e quindi dovrebbe essere considerato, a ragione, come una costante logica. Ciononostante, esso non permette di dimostrare una proprietà assai naturale: la *deducibilità degli identici* (Hacking 1979). Come abbiamo già accennato, il punto (P1) è soddisfatto richiedendo che il comportamento dei connettivi logici sia determinato da regole d'inferenza. Questa però è una richiesta ancora troppo vaga: si vorrebbe infatti avere anche la garanzia che il comportamento dei connettivi sia determinato *esclusivamente* dalle regole d'inferenza a loro associate. Ora, dato un qualsiasi enunciato, è sempre possibile derivarlo una volta che lo si è assunto, e questo lo si può fare senza usare alcuna particolare regola d'inferenza, grazie alla riflessività della relazione di derivabilità (*cfr.* punto 1) della Def. 4). Tuttavia, se l'enunciato è complesso, contiene cioè almeno un connettivo, è assai naturale richiedere che la maniera di derivarlo rispetti la maniera in cui esso è formato sintatticamente. Più precisamente, dato un enunciato $C(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ avente C come connettivo principale, visto che non ci sono altri connettivi coinvolti in maniera esplicita, è naturale attendersi che la derivazione di $C(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ da se stesso rispetti la maniera in cui $C(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ è formato sintatticamente, cioè per applicazione di C ai sotto-enunciati $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. È dunque naturale attendersi che $C(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ sia derivabile da se stesso usando solo le regole d'inferenza per C . Se così non fosse, si avrebbe una situazione in cui un enunciato contenente C sarebbe derivabile senza tuttavia dover necessariamente far ricorso alle regole d'inferenza per C ; tali regole non sarebbero quindi sufficienti per cogliere tutti i possibili usi inferenziali del connettivo C . Detto altrimenti, la relazione di derivabilità non sarebbe totalmente definita dalle regole di inferenza associate ai connettivi, in particolare la riflessività per gli enunciati complessi sarebbe una proprietà ottenuta in maniera stipulatoria anziché essere indotta dalle regole che governano i connettivi. Analizzando il connettivo \star si può dimostrare che non è possibile derivare $\varphi \star \psi$ a partire da se stesso usando esclusivamente le regole di \star ; il punto (P1) non è quindi pienamente soddisfatto. Supponiamo, infatti, che $\varphi \star \psi$ sia derivato applicando come ultima regola un'istanza di \star -intro, avremmo dunque che le premesse di tale istanza sono φ e ψ . Ora, ψ può essere derivato applicando un'istanza della regola di \star -elim, ma a questo punto ci troveremmo non solo con la premessa $\varphi \star \psi$, ma anche con due

occorrenze di φ che non sappiamo come eliminare, visto che per ipotesi possiamo usare solo le regole di \star .

Per ovviare a questo problema, la soluzione è modificare il principio di Prawitz, imponendo una relazione più stretta fra premesse delle regole di introduzione e conseguenze delle regole di eliminazione per un dato connettivo. Consideriamo questa nuova condizione di armonia:

Definizione 7 (Principio di Negri & von Plato¹⁷). *Le regole di eliminazione associate ad un certo connettivo C devono permettere di derivare esattamente quanto segue dalle premesse delle regole di introduzione per C .*

In tal maniera il connettivo \star può essere considerato come non logico, visto che la regola di eliminazione non ha fra le sue conseguenze la prima premessa della regola di introduzione, ossia φ (posto che φ e ψ siano differenti). Inoltre, non è difficile far vedere che, se le regole di un connettivo rispettano la Definizione 7, allora esse soddisfano anche la proprietà della deducibilità degli identici (cfr. Matthes 2001).

Un ulteriore interesse della Definizione 7 è che essa permette di giustificare come logiche certe modalità. In particolare, il connettivo unario \Box del sistema **S4**, a differenza del criterio di Belnap, può essere considerato come logico se viene formulato nella maniera seguente:

$$\begin{array}{c}
 \Box\Gamma \\
 \vdots \\
 \varphi \\
 \hline
 \Box\varphi \quad \Box\text{-intro}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{cc}
 & 1. \\
 \Gamma & \Gamma', [\varphi]^n \\
 \vdots & \vdots \\
 \Box\varphi & \psi \\
 \hline
 \psi & \Box\text{-elim } 1.
 \end{array}$$

La differenza fra i due criteri, tuttavia, non si limita solo alla divergenza nel trattamento delle modalità. Vi è anche una differenza a livello concettuale e metodologico. In effetti, il fissare l'attenzione solo sulla conservatività pone un'eccessiva importanza sulla relazione di derivabilità, che in fondo altro non è altro che una relazione algebrica di pre-ordine sugli enunciati (considerati in quanto *oggetti formali*), finendo così per dimenticare la struttura interna delle derivazioni stesse. La relazione di derivabilità, infatti, considera solamente i "margini di una derivazione", cioè le premesse e la conclusione, senza interessarsi del percorso inferenziale che le lega. Focalizzare l'attenzione sulla struttura stessa delle

¹⁷La formulazione del principio nella sua versione originale si trova in Negri & von Plato (2001, p. 6) e Negri (2002, p. 572).

derivazioni, invece, permette da una parte di restare più fedeli nello spirito al punto (P1) e dall'altra di costruire un criterio puramente "interno" alle derivazioni. L'armonia, infatti, è un criterio basato sulla possibilità di operare o meno delle manipolazioni sulle derivazioni stesse, senza dover fare riferimento a nozioni algebrico-relazionali come quella di estensione conservativa.¹⁸ Inoltre, visto che le derivazioni altro non sono che degli argomenti deduttivi, come possono esserlo gli argomenti che usiamo nella nostra attività comunicativa, viene piuttosto naturale considerare che le entità sulle quali agiscono le regole d'inferenza, e quindi i connettivi, siano delle asserzioni (*statements*) piuttosto che degli enunciati.

Concludiamo con un'ultima considerazione che, invece, è comune al criterio di Belnap e a quello dell'armonia. In generale l'applicazione dell'approccio *proof*-teoretico porta a considerare come logici i connettivi della logica intuizionista, ma ha difficoltà nel giustificare quelli della logica classica: il problema è dovuto al comportamento della negazione classica. La differenza fra la negazione intuizionista e quella classica è che quest'ultima è *involutiva*, mentre la prima non lo è. In altri termini, in logica classica vale la legge $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$, mentre questo non vero nella logica intuizionista. Pertanto, una maniera intuitiva di cogliere il comportamento della negazione classica, è di aggiungere alle regole di *NJ* la regola seguente:

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ \neg\neg\varphi \end{array}}{\varphi} \neg\neg\text{-elim}$$

Il problema è che questa regola non è armonica con la regola di introduzione della negazione. Infatti non sempre è possibile definire una strategia di normalizzazione nel caso di un *detour* \neg -intro/ $\neg\neg$ -elim:

¹⁸Il criterio di Belnap può essere considerato come relazionale nel senso che, per essere formulato, necessita non solo della teoria sotto indagine, ma anche di un'altra teoria di base, rispetto alla quale la prima è valutata. Pertanto, le considerazioni che si fanno su una teoria non sono mai assolute, ma dipendono sempre da quale teoria di base si è scelta. Tuttavia si potrebbe cercare di tenere fissa la teoria di base, definendola in maniera puramente strutturale, riferendosi cioè a regole che sono indipendenti dal linguaggio di volta in volta considerato. Per far questo risulta utile passare al calcolo dei sequenti e considerare un sistema composto esclusivamente da regole di inferenza che rispecchiano le proprietà elencate al punto iii) della Definizione 4. Questo significa la teoria di base con un insieme di regole composte solamente dalla regola per gli assiomi identità, dalla regola di taglio (*Cut*), dalla regola di indebolimento (*Weakening*), e eventualmente dalla regola di contrazione (*Contraction*), se la relazione di derivabilità è definita su multi-insiemi invece che su insiemi (cfr. Negri & von Plato 2001, pp. 16–18). In questa maniera si potrebbe mostrare che anche la logica classica è conservativa e in particolare che la negazione classica è un connettivo accettabile dal punto di vista logico, a dispetto di quello che la visione *proof*-teoretica porta di solito a concludere (cfr. p. 23, *infra*). Dobbiamo queste osservazioni a Luca Tranchini.

$$\begin{array}{ccc}
1. & & \\
\Gamma, [\neg\varphi]^n & & \\
\vdots & \rightsquigarrow & ? \\
\frac{\perp}{\neg\neg\varphi} \neg\text{-intro } 1. & & \\
\frac{\neg\neg\varphi}{\varphi} \neg\text{-elim} & &
\end{array}$$

Se ne deve concludere che la negazione intuizionista, secondo il criterio di armonia, non può essere considerata come una costante logica genuina. Questa stessa conclusione viene affermata anche dal criterio di Belnap. Consideriamo il linguaggio $\mathcal{L} = \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ e il sistema $LM = \langle \mathcal{L}, En_{\mathcal{L}}, \vdash_{LM} \rangle$, dove \vdash_{LM} è determinato dalle regole della deduzione naturale associate ai connettivi di \mathcal{L} . LM è noto sotto il nome di logica minimale. Aggiungiamo ora a \mathcal{L} i connettivi \perp e \neg , il cui comportamento fissato dalle seguenti regole:

$$\begin{array}{cccc}
1. & \Gamma & \Gamma' & \Gamma \\
\Gamma, [\varphi]^n & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \varphi & \neg\varphi & \perp \\
\frac{\perp}{\neg\varphi} \neg\text{-intro } 1. & \frac{\quad}{\perp} & \neg\text{-elim} & \frac{\perp}{\varphi} \text{efq} \\
& & & \frac{\neg\neg\varphi}{\varphi} \neg\text{-elim}
\end{array}$$

Sia LC la teoria ottenuta tramite quest'estensione di LM ; tale estensione è un'estensione non conservativa rispetto a LM . Infatti, dato $PL \equiv ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$,¹⁹ si ha che $PL \in En_{\mathcal{L}}$ e $\vdash_{LC} PL$, ma $\nvdash_{LM} PL$. Ora, LC è esattamente quella che conosciamo come logica classica. Pertanto, i connettivi usati per definire il comportamento della negazione classica non solo non sono armonici, ma portano anche alla costruzione di teorie non conservative. Questo significa che la negazione classica non è un connettivo completamente non informativo; al contrario, esso modifica il comportamento degli altri connettivi e rende le derivazioni non analitiche. Per ricostruire una derivazione classica non è più sufficiente analizzare la conclusione e le premesse, ma è necessario avere una sorta di informazione *esterna* e supplementare; per esempio un'informazione che segnali quale è l'enunciato su cui si è ragionato classicamente, ovvero un'informazione che indichi quando è stata usata la regola di $\neg\neg$ -elim.²⁰

¹⁹L'acronimo PL sta per legge di Peirce (in inglese, *Peirce's Law*).

²⁰Sarebbe inopportuno non far notare che vi sono regole che colgono il comportamento della negazione classica e che godono della proprietà di normalizzazione, come per esempio la regola di *reductio ad absurdum* (Prawitz 1965) o la regola del terzo escluso (Negri & von Plato 2001). Tuttavia, anche in tal caso, resta la difficoltà di considerare la negazione classica come un connettivo logico poiché viene persa la proprietà di analiticità. Questo significa che le derivazioni che

5 Conclusione

In conclusione, le due classi di criteri (*model*-teoretici e *proof*-teoretici) che abbiamo analizzato, non solo non individuano esattamente gli stessi insiemi di connettivi logici, ma non sembrano neanche riuscire a convergere verso un sottoinsieme comunemente accettato: l'intersezione fra gli insiemi di costanti logiche individuati da ciascuna classe di criteri è un'intersezione vuota. Infatti, se i criteri *proof*-teoretici, pur differendo sulle modalità, accettano trasversalmente gli usuali connettivi intuizionisti, questo non è il caso degli approcci *model*-teoretici, i quali accettano come logiche le loro controparti classiche. La mancanza di una base di costanti logiche comunemente accettata da tutti i criteri ci fa concludere che il concetto di costante logica non è un concetto stabile e invariante; pertanto non è possibile essere convenzionalisti nella scelta dei criteri di logicità. Tale mancanza di convenzionalità potrebbe allora essere vista come un sintomo della mancanza di un genuino concetto corrispondente al termine 'logico'. In un certo senso questo potrebbe portare ad abbracciare una posizione scettica secondo cui vano è tentare di definire in maniera formale e precisa ciò che è logico e separarlo da ciò che non lo è, perché in realtà non c'è niente da definire. Tutt'al più, la soluzione potrebbe essere di ridurre la questione a una mera scelta arbitraria e sostenere che in fondo, come già affermato da Quine, le costanti logiche sono di volta in volta individuate per semplice enumerazione: « logical vocabulary is specified only, I suppose, by enumeration » (Quine 1976, p. 141).²¹ La differenza fra logico e non logico sarebbe allora stabilita su base puramente *stipulativa*.

Ringraziamenti

Gli autori ringraziano Luca Tranchini per l'entusiasmo con cui ha accettato di rileggere e commentare il presente articolo, oltre che per i preziosi suggerimenti che ci ha fornito durante il lavoro di redazione. Alberto Naibo desidera inoltre ringraziare Jean-Baptiste Joinet e Mattia Petrolo per le numerose e utili discussioni avute su questi temi nel corso degli ultimi anni.

usano le regole per la negazione classica contengono delle formule che non sono sottoformule né della conclusione né delle premesse. Pertanto la condizione (P2) non è più rispettata. Tuttavia, un recente lavoro di J. von Plato e A. Siders sembra poter stabilire che la proprietà della sottoformula vale senza restrizioni anche nel caso della logica classica (*cfr.* von Plato & Siders 2012). In questa sede non possiamo addentrarci in un'analisi approfondita di questo articolo. Ci limitiamo a far notare che per avere la proprietà della sottoformula la scelta delle regole che governano la negazione è decisiva. Interessante sarebbe dunque capire su quali principi si fonda la giustificazione o, più banalmente, la scelta di tali regole.

²¹La stessa opinione è condivisa anche da B. Russell nei *Principles of Mathematics* e da quello che potremmo chiamare il "primo Tarski, cioè il Tarski antecedente la conferenza di Londra del 1966.

Bibliografia

- Antonelli, A. (1998). “Definition”, in E. Craig (ed.), *Routledge Encyclopedia of Philosophy* Routledge, London.
- Belnap, N. (1962). “Tonk, plonk and plink”, *Analysis*, vol. 22, n. 6, pp. 130–134.
- van Benthem, J. & D. Bonnay (2008). “Modal logic and invariance”, *Journal of Applied and Non-Classical Logic*, vol. 18, n. 2-3, pp. 153–173.
- Bonnay, D. (2007). “Règles et signification : le point de vue de la logique classique” in J.-B. Joinet (ed.), *Logique, dynamique et cognition*, Publications de la Sorbonne, Paris, pp. 213–231.
- Bonnay, D. (2008). “Logicality and invariance”, *The Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 14, n. 1, pp. 29–68.
- Došen, K. & P. Schroeder-Heister (1988). “Uniqueness, definability and interpolation”, *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 53, n. 2, pp. 554–570.
- Dummett, M. (1991). *The Logical Basis of Metaphysics*, Duckworth, London.
- Feferman, S. (1999). “Logic, logics, and logicism”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 40, n. 1, pp. 31–54.
- Frege, G. (1879). “Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens”, trad. it. in Id., *Logica e aritmetica, scritti raccolti a cura di C. Mangione, Boringhieri, Torino, 1965*.
- Hacking, I. (1979). “What is logic?”, *The Journal of Philosophy*, vol. 76, n. 6, pp. 285–319.
- Jensen, R. (1995). “Inner models and large cardinals”, *The Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 1, n. 4, pp. 393–407.
- Martin-Löf, P. (1996). “On the meanings of the logical constants and the justifications of the logical laws”, *Nordic Journal of Philosophical Logic*, vol. 1, n. 1, pp. 11–60.
- Matthes, R. (2001). “Interpolation for natural deduction with generalized eliminations”, in R. Kahle et al. (eds.), *Proof Theory in Computer Science*, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 2183, Springer, Berlin, pp. 153–169.
- Moriconi, E. (1993). *Dimostrazioni e significato: Michael Dummett, Dag Prawitz, Per Martin-Löf*, Franco Angeli, Milano.

- Naibo, A. (2010). “Théorie de la signification et constantes logiques”, manoscritto delle note del corso di *Philosophie de la Logique*, a.a. 2009–2010, Département de Philosophie, Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne.
- Naibo, A. & M. Petrolo (2014). “Are uniqueness and deducibility of identicals the same?”, *Theoria: A Swedish Journal of Philosophy*, in corso di pubblicazione.
- Negri, S. (2002). “Varieties of linear calculi”, *Journal of Philosophical Logic*, vol. 31, n. 6, pp. 569–590.
- Negri, S. & J. von Plato (2001). *Structural Proof Theory*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Panza, M. & A. Sereni (2010). *Il problema di Platone. Un'introduzione storica alla filosofia della matematica*, Carocci, Roma.
- von Plato, J. & A. Siders (2012). “Normal derivability in classical natural deduction”, *The Review of Symbolic Logic*, vol. 5, n. 2, pp. 205–211.
- Prawitz, D. (1965). *Natural Deduction: A proof-theoretical study*, Almqvist & Wiksell, Stockholm.
- Prawitz, D. (1971). “Ideas and results in proof theory”, in J. Fenstad (ed.), *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium*, North-Holland, Amsterdam, pp. 237–309.
- Prior, A. (1960). “The runabout inference-ticket”, *Analysis*, vol. 21, n. 2, pp. 38–39.
- Quine, W.V.O. (1976). *The Ways of Paradox*, Harvard University Press, Cambridge Mass.
- Tarski, A. (1936). “On the concept of logical consequence”, in Id., *Logic, Semantics, Metamathematics* (2nd edition), tr. ingl. di J.H. Woodger, introduzione di J. Corcoran, Hackett Publishing, Indianapolis, 1983, pp. 409–420.
- Tarski, A. (1986). “What are logical notions”, a cura di J. Corcoran, *History and Philosophy of Logic*, vol. 7, n. 2, pp. 143–154.
- Troesltra, A. S. & H. Schwichtenberg (2000). *Basic Proof Theory* (2nd edition), Cambridge University Press, Cambridge.